Basisprüfung lineare Algebra - Winter 2020

Michael Baumgartner

1. a)

$$\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$\begin{bmatrix}1\\0\\-1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}, \quad \begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{bmatrix} = \underline{\underline{0}} \quad \rightarrow$$ Paarweise orthogonal

b) Lin. unabh. da paarweise orthogonal.

Man könnte auch gaussen.

c) Spalten normieren:

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \end{bmatrix}$$

$$A = Q \cdot R = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{4} & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{4} \\ 1/\sqrt{4} & 0 & -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{4} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sqrt{4} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{4} \end{bmatrix}}}$$

5. a)

$$\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ \lambda B & \lambda I_n \end{bmatrix}}}$$

$$\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}}}$$

b)

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ \lambda B & \lambda I_n \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}\right)$$

$$= \underbrace{\det\begin{bmatrix} I_m & -A \\ 0 & \lambda \cdot I_n \end{bmatrix}}_{\lambda^n} \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \underbrace{\det\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix}}_{\lambda^n} \cdot \det\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} I_m & 0 \\ -B & \lambda I_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ B & I_n \end{bmatrix}\right) = \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}\right)$$

$$\det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_m - AB & 0 \\ \lambda B & \lambda I_n \end{bmatrix}\right) = \overbrace{\det(\lambda I_m - AB)\underbrace{\det(\lambda I_n)}_{\lambda^n}}^{P_1(\lambda)}$$

$$= \det\left(\begin{bmatrix} \lambda I_m & A \\ 0 & \lambda I_n - BA \end{bmatrix}\right) = \underbrace{\underbrace{\det(\lambda I_m)}_{\lambda^m}\det(\lambda I_n - BA)}_{P_2(\lambda)}$$

$\forall \lambda \in \mathbb{C}$

Da beide Matrizen dasselbe charakteristische Polynom bilden (bis auf einen Faktor λ^{m-n}), müssen sie auch dieselben nicht-null Lösungen für $P_1(\lambda) = P_2(\lambda) \overset{!}{=} 0$ aufweisen. $\square$